

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشگاه زنجان

دانشکده علوم  
گروه ریاضی

رساله (پایان نامه) برای دریافت درجه دکتری (کارشناسی ارشد)  
در رشته

نام رشته نوشته شود

**عنوان پایان نامه**

نگارش

...

استاد راهنما

دکتر ...

استاد مشاور

دکتر ...

شهریور ۱۳۹۵





دانشگاه شهردر

### تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب علی مرصعی متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان توابع بطور کامل یکنوا و کاربردهای آن در نظریه اعداد حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه زنجان می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء



تقديم

...

و

...





# سپاس‌گزاری

در این قسمت متن سپاس‌گزاری نوشته می‌شود...



## چکیده

در این قسمت متن چکیده نوشته می شود...

واژگان کلیدی: واژگان کلیدی اینجا قرار می گیرند...

رده بندی موضوعی ۲۰۱۰: aaXbb؛ ccYdd



# فهرست مطالب

ث	فهرست مطالب
چ	فهرست جداول
خ	فهرست تصاویر
ذ	پیشگفتار
۱	۱ نحوه نصب و راه اندازی
۱	۱.۱ نحوه نصب زی پرشین تحت تک لایو . . . . .
۳	۲ نحوه نوشتن و محیط‌های لازم
۳	۱.۲ مقدمه . . . . .
۵	۲.۲ محیط‌های لازم در پایان‌نامه . . . . .
۱۱	مراجع
۱۳	واژه‌نامه
۱۵	نمایه



# فهرست جداول

۱۰۲ برخی از معروفترین توابع پایه‌ای شعاعی ..... ۷





# فهرست تصاویر

۱.۲ چندربعی‌های تعمیم‌یافته ..... ۷



# پیشگفتار

پیشگفتار در این مکان نوشته می‌شود. برای نمونه چند سطر به همراه زیر نویس لاتین در اینجا قرار داده شده است.

روش‌های تفاضلات متناهی<sup>۱</sup> به عنوان اولین خانواده از روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح هستند. با وجودی که روش‌های تفاضلات متناهی برای حل انواع بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بکار گرفته شده است، پایداری محدود روش‌های تفاضلات متناهی صریح<sup>۲</sup> و افزایش هزینه محاسباتی در روش‌های تفاضلات متناهی ضمنی<sup>۳</sup> و همچنین پیاده‌سازی مشکل این روش‌ها برای مسائل غیرخطی، کاربرد این روش‌ها را با محدودیت مواجه ساخته است [۳]. از طرفی چون این روش‌ها جواب مساله را روی نقاط واقع بر روی یک شبکه‌بندی تقریب می‌زنند، لذا دقت آنها روی دامنه‌های غیرهموار و نامنظم کاهش می‌یابد.

در سه دهه اخیر، روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی<sup>۴</sup> به عنوان یک ابزار قدرتمند برای درونیابی داده‌های پراکنده مورد توجه بوده است. از زمان کار اولیه کانسا در سال ۱۹۹۰ [۶]، استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای حل عددی انواع مختلف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نیز مورد توجه قرار گرفت. در آن مقاله، کانسا برای اولین بار ایده استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی را برای تقریب جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح کرد. از آن پس، حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با روش هم‌مکانی توابع پایه‌ای شعاعی به خاطر عدم نیاز به شبکه‌بندی دامنه به روش جانشین مناسبی برای روش‌های سنتی حل معادلات تبدیل شد. همچنین توابع پایه‌ای شعاعی ابزاری قدرتمند برای

---

<sup>1</sup> Finite Difference Methods (FDM)    <sup>2</sup> Explicit FDM    <sup>3</sup> Implicit FDM    <sup>4</sup> Radial Basis Functions (RBF)

تقریب‌های چندمتغیره نیز می‌باشند. بطور کلی، مزیت‌های اصلی روش هم‌مکانی توابع پایه‌ای شعاعی ارائه شده توسط کانسا بر روش پُرکاربرد المان‌های محدود<sup>۵</sup> عبارتند از:

- در این روش می‌توان نقاط هم‌مکانی را بصورت کاملاً آزاد انتخاب کرد و برخلاف روش المان‌های محدود هیچ وابستگی بین نقاط لازم نیست. بنابراین، مساله پیچیده شبکه‌بندی دامنه در اینجا وجود ندارد. این در حالی است که بطور معمول مساله شبکه‌بندی دامنه‌های نامنظم تقریباً ۷۰ درصد از هزینه‌های محاسباتی روش‌های المان‌های محدود را به خود اختصاص می‌دهد.

- عدم وابستگی به بُعد فضا باعث می‌شود تا به راحتی بتوان روش را برای حل مسائل با ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد.

در نتیجه، روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی بدلیل عدم نیاز به شبکه‌بندی مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان و مهندسين قرار گرفته است. این رساله شامل پنج فصل می‌باشد. در فصل اول توابع پایه‌ای شعاعی معرفی خواهد شد. در فصل دوم روش‌های هم‌مکانی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی ارائه می‌شود. در فصل سوم روش‌های پیش‌شرط سازی برای روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی و نتایج حاصل از پیاده‌سازی آنها روی معادله ساین-گوردن دو بعدی ارائه می‌شود. در فصل چهارم تلفیق روش پیشگو-اصلاحگر<sup>۶</sup> با روش توابع پایه‌ای شعاعی و نتایج بکارگیری آن روی معادله‌های موج بلند منظم شده و بوسینسک اصلاح شده گفته می‌شود. در فصل پنجم انواع روش‌های اصلاح رفتار مرزی توابع شعاعی پیشنهاد شده و از آنها در حل عددی معادله دو بعدی غیرخطی گینزبرگ-لاندائو استفاده می‌شود. فهرست مقالات استخراج شده از این رساله به شرح زیر است:

#### 1. title of paper

---

<sup>5</sup> Finite Element Method (FEM)      <sup>6</sup> Predictor-Corrector Methods

## فصل ۱

# نحوه نصب و راه اندازی

### ۱.۱ نحوه نصب زی پرشین تحت تک لایو

برای نصب زی پرشین تحت تک لایو ۲۰۱۷، اجرای مراحل زیر ضروری است:

۱. قبل از انجام هرکاری، حتما آنتی ویروس سیستم خود را Disable نمایید.
۲. وارد پوشه Fonts(Comple) شده و با انتخاب همه فونت‌ها و کلیک راست روی قسمت آبی رنگ و انتخاب گزینه Install اجازه دهید همه فونت‌ها روی سیستم شما نصب گردد. توجه کنید در صورتی که برخی از فونت‌ها در سیستم شما موجود باشند می‌توانید آنها را جایگزین نمایید.
۳. سپس نرم افزار ۵۴۶۰ VirtualCloneDrive را نصب نمایید تا با ایجاد یک CDRom مجازی برای شما، فایل‌های Image قادر به باز شدن باشند.
۴. بعد از ایجاد CDRom مجازی، فایل Image مربوط به تک لایو، یعنی ۲۰۱۷texlive را در درایو مجازی فراخوانی نمایید.
۵. در داخل CDRom مجازی باز شده، روی آیکون install-tl-windows کلیک راست کرده و سپس گزینه Run as administrator را انتخاب نمایید و اجازه دهید

تک لایو شروع به نصب کند. همه گزینه‌ها را به صورت پیش فرض جلو ببرید. توجه کنید که این مرحله از نصب برنامه، بسته به سرعت سیستم، حدود ۲۰ تا ۴۵ دقیقه به طول می‌انجامد.

۶. در این مرحله، ویرایشگر مربوط به زی پرشین، تک میکر را نصب می‌کنیم. برای این منظور روی آیکون `instaler-۳۰۱۰۰-۳-bidiTeXmaker` دوبار کلیک کرده تا نرم‌افزار شروع به نصب کند. همه مراحل را به صورت پیش فرض ادامه دهید تا مراحل نصب کامل گردد.

۷. سپس سیستم را یک بار restart کنید.

اکنون نرم‌افزار برای کار آماده می‌باشد. در فصل بعد یک نمونه متن به همراه نحوه قرار دادن شکل و جدول و سایر نکات لازم برای نوشتن پایان‌نامه آورده شده است. در ضمن برای ایجاد تغییرات در هر یک از بخش‌ها کافی است فایل مربوط به آن را تغییر دهید.

## فصل ۲

# نحوه نوشتن و محیط‌های لازم

### ۱.۲ مقدمه

برای نوشتن متن پایان‌نامه می‌توانید با ایجاد یک فایل برای هر فصل که با دستور `\chap-` `ter` آغاز می‌شود و فعال کردن فراخوانی آن در فایل `main` (با استفاده از دستور `\input` یا با برداشتن علامت % از جلوی خط فرمان آن فصل) و اجرای فایل `main` اقدام کنید. فایل‌های عنوان فارسی `title-fa` و لاتین `title-en`، چکیده فارسی `abstract-fa` و لاتین `abstract-en`، سپاس‌گزاری `acknowled` و پیشگفتار `intro` موجود می‌باشند و فقط به تناسب پایان‌نامه خود متن آنها را اصلاح کنید ولی در چارچوب کلی آنها تغییری ایجاد نکنید. برای ایجاد بخش از دستور `section` و برای زیربخش از دستور `\subsection` استفاده می‌شود. زیرنویس لاتین با دستور `LTRfootnote` به این صورت <sup>۱</sup> و زیرنویس فارسی نیز با دستور `footnote` به این صورت <sup>۲</sup> ایجاد می‌شود. برای قراردادن ویرگول از `shift+t` و برای نیم فاصله هم می‌توانید از ترکیب کلیدهای `ctrl+shift+۲` استفاده کنید.

برای ایجاد نمایه در انتهای پایان‌نامه، در اولین ظهور یک کلمه در متن که می‌خواهید در نمایه آورده شود از دستور `\index` استفاده می‌شود و برای ایجاد نمایه قبل از اجرای `main` یک بار دکمه `F۱۲` را فشار دهید.

برای نوشتن فرمول‌های ریاضی می‌توانید از دو علامت `$` برای فرمول داخل متن و

---

<sup>۱</sup>English footnote      <sup>۲</sup>زیرنویس فارسی

دستورهای equation ، align و multiline برای فرمول‌های تک خطی و یا چند خطی استفاده کنید. با قرار دادن علامت \* در جلوی هر یک از دستورات فوق فرمول‌ها بدون شماره در متن قرار خواهند گرفت.

به عنوان نمونه چند فرمول در ادامه آورده شده است:  
فرمول با شماره:

$$K(x, y) := \exp(-\beta \|x - y\|_V^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.2)$$

و بدون شماره:

$$\mathcal{P}f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x_j, x) + \sum_{m=1}^Q b_m p_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

یک فرمول بلند دو خطی:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f(x) = & \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x_j, x) + \sum_{m=1}^Q b_m p_m(x) + \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x_j, x) + \sum_{m=1}^Q b_m p_m(x) \\ & + \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x_j, x) + \sum_{m=1}^Q b_m p_m(x) + \sum_{j=1}^N \alpha_j K(x_j, x) + \sum_{m=1}^Q b_m p_m(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

نحوه نوشتن یک ماتریس:

$$\begin{bmatrix} M & P \\ P^T & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \circ \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

چند معادله زیرهم:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \notin -\mathbb{N},$$

$$\Gamma(k+1) = k!, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (4.2)$$



یک تابع دو ضابطه‌ای:

$$\Omega_d = \begin{cases} \cos(r), & d = 1 \\ \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{r}{2}\right)^{(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(r), & d \geq 2 \end{cases} \quad (5.2)$$

ارجاع به یک فرمول با استفاده از دستور `\eqref` به صورت (۶.۲) انجام می‌شود. برای ارجاع به قضیه و مثال و شکل و ... از دستور `\ref` استفاده می‌شود تا شماره داخل پرانتز قرار نگیرد (توجه کنید که برای ارجاع به یک فرمول، شکل، قضیه و ... حتما باید قبلاً به آن یک `label` اختصاص داده شده باشد).

## ۲.۲ محیط‌های لازم در پایان‌نامه

انواع محیط‌هایی که در نوشتن پایان‌نامه به آنها نیاز دارید را با یک مثال برای هر کدام در ادامه آورده‌ایم:

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض کنید  $\Omega$  یک مجموعه دلخواه ناتمامی باشد. در اینصورت تابع

$$K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C},$$

یک هسته (حقیقی یا مختلط) روی  $\Omega$  نامیده می‌شود.  $K$  را یک هسته هرمیتی<sup>۳</sup> گوییم هرگاه

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \quad \forall x, y \in \Omega,$$

که اگر در این حالت هسته حقیقی داشته باشیم این خاصیت یک هسته متقارن را تعریف می‌کند.

**مثال ۲.۲.۲.** توابع گاوسی

$$K(x, y) := \exp(-\beta \|x - y\|_2^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (6.2)$$

یک هسته حقیقی متقارن هستند. این توابع را می‌توان بصورت تابعی از نرم اقلیدسی<sup>۴</sup>  $r = \|x - y\|_2$  نوشت:

$$\phi(r) = K(\|x - y\|_2), \quad \phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K}$$

<sup>3</sup> Hermitian kernel

<sup>4</sup> Euclidean norm

لذا معمولاً به این نوع توابع، تابع پایه‌ای شعاعی گفته می‌شود.

لم ۳.۲.۲. فرض کنید  $\{L_0, L_1, \dots, L_m\}$  مجموعه‌ای از  $m+1$  خط مجزا در  $\mathbb{R}^2$  باشند و  $X = \{x_1, \dots, x_Q\}$  مجموعه‌ای از  $Q = (m+1)(m+2)/2$  نقطه مجزا باشد بطوری که اولین نقطه روی  $L_0$ ، دو نقطه بعدی روی  $L_1$  و به همین ترتیب  $m+1$  نقطه آخر روی  $L_m$  واقع شده باشند. در این صورت  $X$  یک  $\mathbb{P}_m^2$ -یکتاهل‌کننده است.

برهان. برهان لم بالا و همینطور تعمیم آن به حالت کلی  $d$ -بعدی در [۹] آمده است.  $\square$

قضیه ۴.۲.۲. اگر  $X$  یک مجموعه  $\mathcal{P}$ -یکتاهل‌کننده و  $K$  یک هسته  $\mathcal{P}$ -معین مثبت مشروط باشد آنگاه دستگاه خطی (۳.۲) جواب یکتا دارد.

برهان. برهان قضیه در اینجا آورده می‌شود.  $\square$

نتیجه ۵.۲.۲. محیط نوشتن نتیجه.

تبصره ۶.۲.۲. محیط نوشتن تبصره.

گزاره ۷.۲.۲. محیط نوشتن گزاره.

یک نمونه از ایجاد لیست شماره دار:

۱.  $I$  و  $D$  هر دو محمل فشردن را حفظ می‌کنند. به بیان دیگر، اگر  $\phi$  دارای محمل فشردن باشد آنگاه  $I\phi$  و  $D\phi$  نیز محمل فشردن خواهند داشت.

۲. اگر  $\phi \in C(\mathbb{R})$  و  $t\phi(t) \in L^1[0, \infty)$  آنگاه  $DI\phi = \phi$ .

۳. اگر  $\phi \in C^2(\mathbb{R})$  زوج باشد و  $t\phi' \in L^1[0, \infty)$  آنگاه  $ID\phi = \phi$ .

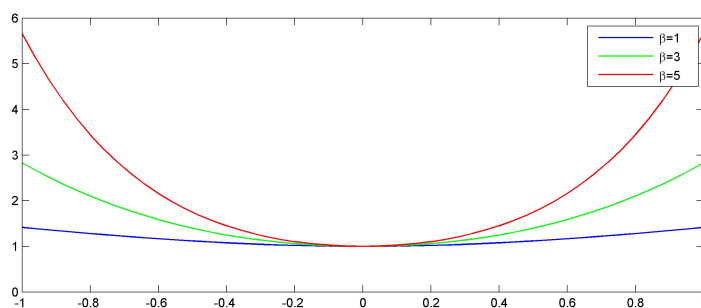
۴. اگر  $t^{d-1}\phi(t) \in L^1[0, \infty)$  و  $d \geq 3$  آنگاه  $F_d(\phi) = F_{d-2}(I\phi)$ .

۵. اگر  $\phi \in C^2(\mathbb{R})$  زوج باشد و  $t^d\phi'(t) \in L^1[0, \infty)$  آنگاه  $F_d(\phi) = F_{d+2}(D\phi)$ .

جدول ۱.۲ و شکل ۱.۲ نمونه‌ای از نحوه قراردادن جدول و شکل در متن می‌باشند.

جدول ۱.۲: برخی از معروفترین توابع پایه‌ای شعاعی

تعریف	نام تابع پایه‌ای شعاعی
$\phi(r) = \exp(-\beta r^2)$	گوسی‌ها
$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	چندربعی‌ها
$\phi(r) = 1/\sqrt{r^2 + c^2}$	چندربعی‌های معکوس
$\phi(r) = r^2 \log(r)$	اسپلاین‌های صفحه‌ای باریک
$\phi(r) = (-1)^{m+1} r^{2m} \log(r), m \in \mathbb{N}$	چندهمسازه‌ها
$\phi(r) = r^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$	توانی‌ها



شکل ۱.۲: چندربعی‌های تعمیم‌یافته

یک نمونه الگوریتم:

**Data:** this text

**Result:** how to write algorithm with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2<sub>ε</sub>

initialization;

**while** *not at end of this document* **do**

    read current;

**if** *understand* **then**

        go to next section;

        current section becomes this one;

**else**

        go back to the beginning of current section;

**end**

**for** *i=1 ... n* **do**

        statements;

**end**

**end**

طریقه قرار دادن یک کد برنامه در متن:

```
#include <stdio.h>
```

```
#define N 10
```

```
/* Block * comment */
```

```
int main() {
```

```
int i;
```

```
// Line comment.
```

```
puts("Hello_world!");
```

```
for (i = 0; i < N; i++) {
```

```
puts("LaTeX_is_also_great_for_programmers!");
```

```
}
```

```
return 0;
```

}

برای توضیحات بیشتر در مورد دستورات زی پرشین می‌توانید به کتاب‌های قرار داده شده در پوشه

Guideline Books for TeX

مراجعه کنید.



## مراجع

- [1] M.D. Buhmann, Multivariate cardinal interpolation with radial basis functions, *Constr. Approx.* 6 (1990), 225–255.
- [2] M. D. Buhmann, Radial functions on compact support, *Proc. Edin. Math. Soc.* 41 (1998), 33–46.
- [3] M. Dehghan, M. Tatari, Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions, *Mathematical and Computer Modelling* 44 (2006) 1160-1168.
- [4] G.E. Fasshauer, Meshfree Methods, *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, M. Rieth and W. Schommers (eds.), American Scientific Publishers (2006), 33–97.
- [5] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *J. Geophys. Res.* 76 (1971), 1905–1915.
- [6] E.J. Kansa, Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications* 19 (1990) 147-161.
- [7] R. Schaback, *Kernel-Based Meshless Methods*, Lecture Note, Göttingen, 2011.
- [8] H. Wang, An efficient Chebyshev-Tau spectral method for Ginzburg-Landau-Schrödinger equations, *Comput. Phys. Commun.* 181 (2010), 325–340.

- 
- [9] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, 2005.
- [10] H. Wendland, Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *Adv. in Comput. Math.* 4 (1995), 389–396.
- [11] Z.M. Wu, Multivariate compactly supported positive definite radial functions, *Adv. in Comput. Math.* 4 (1995), 283–292.
- [۱۲] ر. گوردون، مبانی آنالیز ریاضی، ترجمه ارشک حمیدی، انتشارات نشر علوم ریاضی، ۱۳۹۲.



# واژه‌نامه

Adomian decomposition method	روش تجزیه ادومیان
Backward Euler's method	روش اویلر پسرو
Borel measure	اندازه بُرل
Cardinal function	تابع کاردینال
Collocation method	روش هم‌مکانی
Compact support	بستار فشرده
Dense	چگال
Dirac delta functional	تابع دلتای دیراک
Elastic interaction	برهم‌کنش کشسان
Fill distance	فاصله تراکم
Galerkin method	روش گالرکین
Gaussians	گاوسی‌ها
Generalized multiquadrics	چندجمله‌ای تعمیم یافته
Haar space	فضای هار
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Inelastic interaction	برهم‌کنش غیر کشسان
Interior cone condition	شرط مخروط داخلی
Kernel	هسته
Least Squares Approximation	تقریب کمترین مربعات
Lebesgue measure	اندازه لیگ
Lipschitz constant	ثابت لیپ‌شیتس

Markov's inequality	نامساوی مارکوف
Meshless Petrov-Galerkin Method	روش بدون شبکه پتروف-گالرکین
Native space	فضای محلی
Natural spline	اسپلاین طبیعی
Orthogonal polynomial	چندجمله‌ای متعامد
Polyharmonic spline	اسپلاین چندهمسازه
Positive definite	معین مثبت
Quasi-uniform	شبه-یکنواخت
Radial basis function	تابع پایه‌ای شعاعی
Rayleigh quotient	خارج قسمت ریلی
Reaction-diffusion equation	معادله پخش-وزش
Scattered Hermite interpolation	درونیابی هرمیت پراکنده
Semipositive definite	نیمه معین مثبت
Separation distance	فاصله تفکیک
Taylor expansion	بسط تیلور
Test space	فضای تست
Uncertainty principle	اصل عدم قطعیت
Unisolvant	یکتاحل‌کننده
Vandermonde matrix	ماتریس واندرموند

# نمایه

سپاس‌گزاری، ۳

نرم اقلیدسی، ۵

نمایه، ۳

هسته متقارن، ۵

هسته هرمیتی، ۵

گاوسی، ۵

# Abstract

Write your abstract here...

**Keywords:** The place for writing keywords...

**MSC (2010):** aaXbb; ccYdd



University of Zanjan  
Faculty of Science  
Department of Mathematics

# **Thesis title**

A thesis presented for  
the degree of M. Sc. (or Ph. D.) in

The name of the discipline

By

...

Supervisor

**Dr. ...**

Advisor

**Dr. ...**

September 2016